2°/ Montrer que f est continue en 0.

3°/a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Interpréter géométriquement le résultat.

4°/a) Montrer que D : $y = x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter.

5°/a) Etudier les variations de f.

b) Tracer C_f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1°/ Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

2°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

3°/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4/ Soit F : $[1,+\infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto \dfrac{1}{2} e^{\frac{-1}{x^2}}$.

a) Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que :

$\forall x \geq 1 \ : \ f(x+1) \leq F(x+1) - F(x) \leq f(x) \quad (\bigstar)$.

b) Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par : $U_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$.

Utiliser ($\bigstar$) pour montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^* : \dfrac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2n} \leq U_n \leq \dfrac{e^{\frac{-1}{n^2}} + e^{-1}}{2n}$.

En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente.

Exercice 7 :

Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R} : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+2}$.

1°/a) Etudier les variations de f.